Uitwerkingen CCVW Wiskunde A 24-7-2023

Vraag 1a - 6 punten

$f'(x) = 15 \cdot 6x^5 - 24 \cdot 5x^4 + 10 \cdot 4x^3 = 90x^5 - 120x^4 + 40x^3$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 90x^5 - 120x^4 + 40x^3 = 0 \Leftrightarrow 10x^3(9x^2 - 12x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 9x^2 - 12x + 4 = 0$

$9x^4 - 12x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$. Dit geeft $f(x) = 15 \cdot \frac{2^6}{3^6} - 24 \cdot \frac{2^5}{3^5} + 10 \cdot \frac{2^4}{3^4} = \frac{32}{243}$

De minimale waarde is dus $f(0) = 0$

Vraag 1b - 6 punten

$g'(x) = 1 \cdot \sqrt{2x^2 + 7} + x \cdot \dfrac{4x}{2\sqrt{2x^2 + 7}}$

$g'(1) = \sqrt{9} + \frac{4}{2\sqrt{9}} = 3 + \frac{2}{3} = 3\frac{2}{3}$

Een vergelijking van de raaklijn is dus $y - 3 = 3\frac{2}{3}(x - 1)$ $\left(\Leftrightarrow y = 3\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right)$

De vergelijking van de raaklijn heeft de vorm $y = 3\frac{2}{3}x + b$

Invullen van $y = 3$ en $x = 1$ geeft $3 = 3\frac{2}{3} + b \Leftrightarrow b = -\frac{2}{3}$

Dit geeft als vergelijking: $y = 3\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

De vergelijking kun je ook vinden met $y - 3 = 3\frac{2}{3}(x - 1)$

Vraag 2a - 5 punten

$W = 0 \Leftrightarrow 18 - 3Q - \dfrac{64}{3Q + 2} = 0 \Leftrightarrow (18 - 3Q)(3Q + 2) - 64 = 0 \Leftrightarrow 54Q - 9Q^2 + 36 - 6Q - 64 = 0$

$\Leftrightarrow -9Q^2 + 48Q - 28 = 0$

$D = 48^2 - 4 \cdot 9 \cdot 24 = 1296$; $\sqrt{1296} = 36$. Oplossingen: $Q = \frac{-48+36}{2 \cdot -9} = \frac{2}{3}$ en $Q = \frac{-48-36}{2 \cdot -9} = 4\frac{2}{3}$

Vraag 2b - 6 punten

$W = 18 - 3Q - 64(3Q + 2)^{-1}$ geeft $\mathrm{d}W/\mathrm{d}Q = -3 - 64 \cdot -(3Q + 2)^{-2} \cdot 3 = -3 + \frac{192}{(3Q+2)^2}$

Met de quotiëntregel krijg je $\mathrm{d}W/\mathrm{d}Q = -3 - \frac{0 \cdot (3Q+2) - 64 \cdot 3}{(3Q+2)^2} = -3 + \frac{192}{(3Q+2)^2}$

$\mathrm{d}W/\mathrm{d}Q = 0 \Leftrightarrow \frac{192}{(3Q+2)^2} = 3 \Leftrightarrow (3Q + 2)^2 = 64$

Dit geeft $3Q + 2 = 8 \Leftrightarrow Q = 2$ of $3Q + 2 = -8 \Leftrightarrow Q = -\frac{10}{3}$

Maximale winst: $W(2) = 18 - 6 - \frac{64}{8} = 4$ (= 400 euro) ($Q = -\frac{10}{3}$ is niet mogelijk)

Vraag 3a - 5 punten

De kans dat Ernie op veld 1 landt, is 0

De kans dat Ernie op veld 2 landt is $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ (beide dobbelstenen op 1)

De kans dat Ernie op veld 3 landt is $2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36}$ (worpen 1 + 2 en 2 + 1)

De kans dat Ernie op veld 4 landt is $3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{36}$ (worpen 1 + 3, 2 + 2 en 3 + 1)

De kans dat Ernie niet verder komt dan Bert is dus $\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

De kans dat Ernie wel verder komt dan Bert is zodoende $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Alternatief:

Er zijn 36 even waarschijnlijke uitkomsten voor een worp met twee dobbelstenen

De som van de ogen is groter dan 4 als de som van de ogen 5 t/m 12 is.

Dit is het geval bij $4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 30$ uitkomsten

(*Ook: dit is niet het geval bij* $1 + 2 + 3 = 6$ *uitkomsten (zie hierboven),*
dus wel bij $36 - 6 - 30$ *uitkomsten)*

De kans hierop is $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$

Vraag 3b - 5 punten

De kans dat een spel een winnaar heeft is $1 - 0{,}22 = 0{,}78$

De kans dat Bert een spel wint is zodoende $\frac{0{,}78}{2} = 0{,}39$

De kans dat Bert 4 van de 10 spellen wint is dan $\binom{10}{4} \cdot 0{,}39^4 \cdot (1 - 0{,}39)^6 \approx 0{,}250297$

Vraag 3c - 4 punten

Een speler landt op veld 7 bij 6 van de 36 mogelijke uitkomsten van de worp met twee dobbelstenen, namelijk 1 + 6, 2 + 5, 3 + 4, 4 + 3, 5 + 2 en 6 + 1

Voor iedere speler is de kans om op veld 7 te landen dus $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

De kans dat elk van de drie spelers op veld 7 landt is zodoende $\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216} \approx 0{,}004630$

Vraag 4a - 4 punten

$448 = 450 - 2 = \mu - \sigma$; $451 = 450 + 1 = \mu + \frac{1}{2}\sigma$

19,1% van de flessen heeft een inhoud tussen $\mu - \frac{1}{2}\sigma$ en μ, dus heeft ook 19,1% van de flessen een inhoud tussen μ en $\mu + \frac{1}{2}\sigma$

Het percentage flessen met een inhoud tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \frac{1}{2}\sigma$ is dus
$15{,}0 + 19{,}1 + 19{,}1 = 34{,}1 + 19{,}1 = 53{,}2$.

Vraag 4b - 5 punten

$\mu_{totaal} = \mu_{inhoud} + \mu_{fles} \Leftrightarrow \mu_{fles} = \mu_{totaal} - \mu_{inhoud} = 500 - 414 = 86$

$\sigma^2_{totaal} = \sigma^2_{inhoud} + \sigma^2_{fles} \Leftrightarrow \sigma^2_{fles} = \sigma^2_{totaal} - \sigma^2_{inhoud} = 3^2 - 1{,}84^2 = 5{,}6144$, dus $\sigma_{fles} = \sqrt{5{,}6144} \approx 2{,}37$

Vraag 4c - 2 punten

H_0: $\mu = 450$; H_1: $\mu \neq 450$

Vraag 4d - 5 punten

Als H_0 waar is, is de gemiddelde inhoud G van de 25 flessen normaal verdeeld met $\mu_G = 450$

$\sigma_G = \frac{\sigma}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$

Dit is een tweezijdige toets met $\alpha = 0{,}05$.

De grens van het rechter verwerpingsgebied is dus $g_r = \mu_G + 1.96\sigma_G = 450 + 1{,}96 \cdot 0{,}4 = 450{,}784$

Aangezien de gevonden uitkomst tussen μ en deze grens ligt, wordt de nulhypothese niet verworpen.

Vraag 5a - 3 punten

Bij een exponentiële grafiek door de punten $(2{,}50)$ en $(5{,}20)$ geldt

$20 = 50 \cdot g^3 \Leftrightarrow g^3 = 0{,}4 \Leftrightarrow g = 0{,}4^{\frac{1}{3}} \approx 0{,}7368$

Bij een exponentiële grafiek door de punten $(5{,}20)$ en $(7{,}15)$ geldt

$15 = 20 \cdot g^2 \Leftrightarrow g^2 = 0{,}75 \Leftrightarrow g = 0{,}75^{\frac{1}{2}} \approx 0{,}8660$

Deze groeifactoren zijn niet gelijk, dus is er geen exponentieel verband

Alternatief:

Bij een exponentiële grafiek door de punten $(2{,}50)$ en $(5{,}20)$ geldt

$20 = 50 \cdot g^3 \Leftrightarrow g^3 = 0{,}4 \Leftrightarrow g = 0{,}4^{\frac{1}{3}} \approx 0{,}7368$

Voor $U = 7$ geeft dit: $m = 20 \cdot g^2 \approx 20 \cdot 0{,}7368^2 \approx 10{,}9$

Dit is niet gelijk aan $m = 15$, dus is er geen exponentieel verband

Vraag 5b - 6 punten

$a = evenwichtstand = \dfrac{maximum + minimum}{2} = \dfrac{7{,}0 + 0{,}4}{2} = 3{,}7$

$b = amplitude = maximum - evenwichtsstand = 7{,}0 - 3{,}7 = 3{,}3$

$\left(= minumum + evenwichtsstand = \frac{maximum - minimum}{2}\right)$

$c = \frac{2\pi}{periode} = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$

Op $t = 0$ geldt $\sin\big(c(t-d)\big) = -1$.

Dit geeft $-cd = -\frac{1}{2}\pi \Leftrightarrow \frac{1}{6}\pi \cdot d = \frac{1}{2}\pi$ of $-cd = \frac{3}{2}\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{6}\pi \cdot d = \frac{3}{2}\pi$

Hieruit volgt $d = 3$ of $d = -9$

Alternatief voor de berekening van d:

De grafiek van *U* gaat stijgend door de evenwichtsstand op $t = \frac{1}{4} periode = \frac{1}{4} \cdot 12 = 3$

Op dat moment geldt $t - d = 0 \Leftrightarrow d = t = 3$ *1 punt*

Vraag 5c - 4 punten

W is maximaal als $\sin\left(\frac{2\pi}{11}(t-2{,}75)\right) = 1 = \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)$

Dit geeft $\frac{2\pi}{11}(t-2{,}75) = \frac{1}{2}\pi \Leftrightarrow t-2{,}75 = 2{,}75 \Leftrightarrow t = 5{,}5$.

$periode = \frac{2\pi}{c} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{11}} = 11$

Het Wolf getal was $5\frac{1}{2}$ jaar na 1 januari 1976 maximaal, dat is in 1981
en verder telkens na 11 jaar, dus in 1992, 2003 en 2014

Alternatief:

De periode is 11 (zie hierboven). Het maximum wordt bereikt op $t-2{,}75 = \frac{1}{4}periode$.

Dit geeft (net als hierboven) $t-2{,}75 = 2{,}75 \Leftrightarrow t = 5{,}5$ etc.

Vraag 6a - 4 punten

Op $t = 0$ geldt $T = 4\cdot(5-3\cdot \mathrm{e}^0) = 4\cdot(5-3\cdot 1) = 4\cdot 2 = 8$

Op $t = 2$ geldt $T = 4\cdot(5-3\cdot \mathrm{e}^{-1}) \approx 15{,}585$

Groeipercentage $= \frac{15{,}585-8}{8} \times 100 = 94{,}818$ (ofwel een groei met 95%)

Vraag 6b - 4 punten

$\mathrm{d}T/\mathrm{d}t = 4\cdot -3\cdot \mathrm{e}^{-0{,}5t}\cdot -0{,}5 = 6\cdot \mathrm{e}^{-0{,}5t}$

$t = 1$ geeft $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t = 6\cdot \mathrm{e}^{-0{,}5} \approx 3{,}6$ graden per uur

Vraag 6c - 5 punten

$T = 16 \Leftrightarrow 4(5-3\mathrm{e}^{-0{,}5t}) = 16 \Leftrightarrow 5-3\mathrm{e}^{-0{,}5t} = 4 \Leftrightarrow 3\mathrm{e}^{-0{,}5t} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}5t} = \frac{1}{3}$

Dit geeft $-0{,}5t = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{-0{,}5} \approx 2{,}197$ uur

Dat is 2 uur en 12 minuten (ofwel 132 minuten)

Vraag 6d - 2 punten

Als $t \to \infty$ wordt $\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ vrijwel 0

De maximale temperatuur is zodoende $4(5-0) = 20$ graden